Aufgabe 1 (*Rotationsflächen*) (4 Punkte)
Sei $c : (a,b) \to \mathbb{R}^3$, $c(t) = (r(t), 0, h(t))$, mit $r(t) > 0$ für alle $t \in (a,b)$. Berechnen Sie für die durch Rotation um die z-Achse erzeugte Fläche $F : I \times (0, 2\pi) \to \mathbb{R}^3$ die folgenden Größen:

(i) Die Hauptkrümmungen $\kappa_{1,2}$,

(ii) die Hauptkrümmungsrichtungen $v_{1,2}$,

(iii) die mittlere Krümmung H und die Gaußkrümmung K.

Spezialisieren Sie auf das Katenoid, d.h.

$$c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, \quad c(t) = \left(a \cosh\left(\frac{t}{a}\right), 0, t\right),$$

wobei $a > 0$. Fertigen Sie eine Skizze an.

Aufgabe 2 (*Ennepersche Fläche*) (4 Punkte)
Sei $X : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ die Ennepersche Fläche, gegeben durch

$$X(u,v) = \left(u - \frac{u^3}{3} + uv^2, v - \frac{v^3}{3} + vu^2, u^2 - v^2\right).$$

Berechnen Sie die erste und zweite Fundamentalform sowie die Weingartenabbildung und zeigen Sie, dass die mittlere Krümmung $H \equiv 0$ ist.

Aufgabe 3 (*Nabelpunkte*) (4 Punkte)
Sei $U \subset \mathbb{R}^2$ ein offenes, zusammenhängendes Gebiet, und $F \in C^2(U, \mathbb{R}^3)$ eine reguläre Fläche.
Definition: Ein Punkt $x \in U$ heißt *Nabelpunkt* von F, falls $\kappa_1(x) = \kappa_2(x)$, wobei κ_1, κ_2 die Hauptkrümmungen sind.
Definition: Eine Fläche heißt *planar* (bzw. *sphärisch*), falls die Normale N längs F konstant ist (bzw. falls ein $p \in \mathbb{R}^3$ existiert mit $|F(x) - p| \equiv$ Konstante).
Zeigen Sie: Jeder Punkt $x \in U$ ist ein Nabelpunkt von F genau dann, wenn F planar oder sphärisch ist.

Aufgabe 4 (*Niveaumengen*) (4 Punkte)
Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ eine C^2-Funktion und $F : U \to \mathbb{R}^3$ eine reguläre C^2-Fläche mit $f(F(x)) = 0$ und $Df(F(x)) \neq 0$ für alle $x \in U$. Zeigen Sie für $x \in U$ und $v, w \in \mathbb{R}^2$:

$$Df(F(x)) \perp \mathit{Bild}(DF(x)) \quad \text{und} \quad h(x)(v,w) = -\frac{D^2 f(F(x))(DF(x)v, DF(x)w)}{|Df(F(x))|},$$

wobei h die zweite Fundamentalform von F bzgl. der Normalen $N = \frac{Df}{|Df|} \circ F$ ist.

Bitte schreiben Sie Ihren Namen sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. Abgabe ist am Mittwoch, den 29.06.11.